Nawfal El Hage Hassan.
Topologie générale et espaces normés p 248-249.

Autre exemple de connexe pas c/a ds B X.G p 43 :
$\Gamma = \left[\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} (\{x\}\times\mathbb{R}_+)\right] \cup \left[\bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} (\{x\}\times]-\infty,0[)\right]$.

204

Développement : Connexe par arcs $\not\Leftarrow$ connexe.

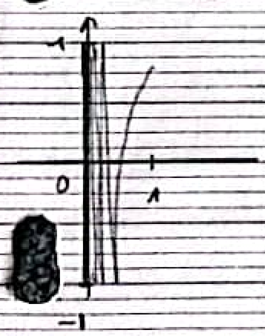
Proposition : Soit X un espace topologique. Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

Démo : ① Soit $a \in X$, pour tout $x \in X$, il existe une application continue $\varphi_x : [0,1] \to X$ telle que $\varphi_x(0) = a$ et $\varphi_x(1) = x$. Soit $A_x = \varphi_x([0,1])$ connexe (image d'un connexe par une application continue) contenant a et x. Alors $X = \bigcup_{x\in X} A_x$ et $\bigcap_{x\in X} A_x \neq \emptyset$ car a est dedans donc X est connexe.

Remarque : La réciproque de la proposition précédente est en général fausse. En effet, il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^2$ l'espace $X = \{(0,y), |y|\leq 1\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in]0,1]\}$

Démo : Montrons que X est connexe, mais qu'il n'est pas connexe par arcs.

X :



② • Puisque l'application $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$ est continue de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ et que $]0,1]$ est connexe, alors $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in]0,1]\}$ est connexe.
• Soit $y \in [-1,1]$, alors il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = y$.
($\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est bijective)
Pour tout $n \geq 1$, soit $x_n = \frac{1}{2\pi n + \theta}$, alors $x_n \in]0,1]$ et on a

$\sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(2\pi n + \theta) = \sin(\theta) = y$, donc $\lim_{n\to+\infty} (x_n, \sin(\frac{1}{x_n})) = (0,y)$
d'où $(0,y) \in \bar{A}$.
Par conséquent, on a $A \subset X \subset \bar{A}$ où A est connexe donc X est connexe

③ Soient $a = (0,y) \in X$ et $b = (\alpha, \sin(\frac{1}{\alpha}))$, avec $\alpha \in]0,1]$. Montrons que l'on ne peut pas relier a et b par un chemin dans X.
Supposons le contraire et soit $\varphi : [0,1] \to X$ continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.
Comme $F = \{0\} \times [-1,1]$ est fermé dans X, $\varphi^{-1}(F)$ est une partie fermée de $[0,1]$ contenant 0, donc $s = \sup(\varphi^{-1}(F)) \in \varphi^{-1}(F)$ et on a $0 \leq s < 1$.

On a $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, alors pour tout $t \in]s, 1]$, on a $\varphi_1(t) > 0$ et $\varphi_2(t) = \sin\left(\frac{1}{\varphi_1(t)}\right)$. Comme φ_2 est continue en s, il existe $\eta > 0$ $s + \eta \leq 1$ et pour tout $t \in [s, s+\eta]$ on ait $|\varphi_2(s) - \varphi_2(t)| < 1$.
Comme φ_1 est continue, on a $[0, \varphi_1(s+\eta)] \subset \varphi_1([s, s+\eta])$.
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{1}{2\pi p + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2\pi q - \frac{\pi}{2}} \in]0, \varphi_1(s+\eta)]$. Alors il

TVI

existe $t_p, t_q \in]s, s+\eta]$ tels que $\varphi_1(t_p) = \frac{1}{2\pi p + \frac{\pi}{2}}$ et $\varphi_1(t_q) = \frac{1}{2\pi q - \frac{\pi}{2}}$

Or on a $|\varphi_2(s) - \varphi_2(t_p)| < 1$ et $|\varphi_2(s) - \varphi_2(t_q)| < 1$ d'où on a $|\varphi_2(s) - 1| < 1$ et $|\varphi_2(s) + 1| < 1$, ce qui est impossible.
Par conséquent on ne peut pas relier a et b par un chemin dans X. Donc X n'est pas connexe par arcs.

<u>Prérequis :</u>

<u>Proposition</u> : Soient A et B deux parties d'un espace topologique X. Si A est connexe et si on a $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

p 236.

<u>Démo</u> : Soient U et V deux ouverts disjoints de B tq $B = U \cup V$. Soient U' et V' deux ouverts de X tels que $U = B \cap U'$ et $V = B \cap V'$. Comme A est connexe et que $A \cap U$ ou $A \cap V \neq \emptyset$ on a $A \subset U$ ou $A \subset V$. Si $A \subset U$, alors $A \cap V = \emptyset$ d'où $A \cap B \cap V' \overset{*}{=} A \cap V' = A \cap V = \emptyset$. Par conséquent $\bar{A} \cap V' \overset{!}{=} \emptyset$ donc $V = B \cap V' \overset{*}{=} B \cap \bar{A} \cap V' = \emptyset$. Si $A \subset V$, on fait le même raisonnement et on montre que $U = \emptyset$ donc B est connexe.

$A \subset B$ donc $A \cap B = A$
$B \subset \bar{A}$ donc $\bar{A} \cap B = B$

<u>Théorème</u> : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On a équivalence entre :
i) A est connexe
ii) A est un intervalle
En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

<u>Démo</u> : p 238.